

从理想模型到真实情境

——基于一个测密度创新实验的“反向建模”教学

杨 磊 (上海中学东校 上海 201306)

摘 要 在一次性量杯中放适量水,将待测固体浸没其中,再令量杯漂浮于水面;利用量杯内、外液面刻度,可快速获得待测物体的密度。教学中先建立理想化的实验模型,再逐渐将模型“贴近真实”增加参数,在此过程中学生深切感受物理建模的意义,获得科学思维和科学探究上的锻炼,收获对科学研究过程的切身体验。

关键词 测密度 创新实验 建模

文章编号 1002-0748(2026)1-0034

中图分类号 G633·7

文献标识码 B

轻质杠杆、薄透镜、轻质光滑滑轮,初中生熟悉这些模型名称,并能轻易说出模型可“忽略次要因素”从而减轻科学研究的工作量。但对于中学阶段的绝大多数模型,学生都缺乏“建模前”和“建模后”的对比,缺乏一个从没有模型到建立模型的经历;每当他们要处理些稍难的问题,他们看到的就已是现成的模型了,对“建模”到底省了多少工作量并没有切身的体会。且这些教科书上的模型均非学生自行建构,学生只是接受这些知识点,却缺乏建构模型的经历——在倡导真实情境、真实问题的今天,这是有缺憾的。处理真实问题,就是要学生自己去建模,自己去思考所建模型的意义,经历所建模型的改进过程,体会模型的现实意义。

密度概念是初中生物质观念的重要一环,测密度是初中阶段物理学科的必做实验。但无论教材上的实验,还是各种习题中变化后的实验方案,对密度的测量总免不了天平 and 量筒这两个专业仪器的配合——这无疑拉大了学生与实验的距离。与比热容、重力加速度等概念不同,密度是学生经常能切身感受的物理量。某种物质的密度是大是小,学生通常用手掂一掂就可获得感性的认识。能不能让这个“熟悉”的物理量,其定量测量也方便些可随手为之?本文用一个学生随手可得(如止咳糖浆附赠)的一次性量杯,设计了一种测常见物质密度的方法。

对这个新方法,学生可以尝试自己建模推导实验原理,并逐步将模型投向现实;关注到越来越多的现实因素,使模型变得越来越复杂。在这个从简到繁的“反向建模”过程中,学生的科学思维和科学探究素养得到锻炼,对“物理模型”的意义产生切身的

认识,对“理论”与“现实”的关系生出自己的思考。

1 创新“测密度”实验

1.1 已有的特殊测密度法

传统的方法使用专业仪器按部就班,思路明确但缺乏对学生能力的考验,因此多种特殊的、需要学生思考的间接测密度方法被提出,比如只用天平、只用量筒、只用弹簧测力计时的测量方案^[1]。

已有的一个只用量筒测密度的方案是这样的:将待测物体放在量筒中,使量筒(连同物体)漂浮在水面,记录外侧水位;再在量筒内只装水,漂浮到同一水位。此时,通过量筒内水的体积(可直接通过量筒刻度读取),换算(水的密度已知)出量筒内水的质量,就可获得待测物体的质量。物体的体积则直接在量筒内通过排水法得到。这种方法与本文实验所用器材相近,因此专门提出;因其在测质量阶段类似曹冲称象,笔者称之为“曹冲称象法”。

1.2 本文的创新测密度法

本文所述实验也只用一个量杯或量筒,但相比“曹冲称象法”操作步骤稍少,其原理推导对学生的思维要求更高。

1.2.1 理想量杯法

“理想量杯”是指轻质薄壁透明量杯,量杯质量不计、厚度不计,可直接读取量杯内、外水位。止咳糖浆等赠送的一次性小量杯可近似满足这些条件。在一次性量杯中倒入体积为 V_0 的水后,将量杯(连同其内的水)放入装有大量水的水槽,此时理想量杯会漂浮在水中,并且杯内、外水面持平,如图 1 所示。

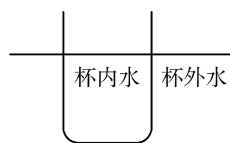


图 1

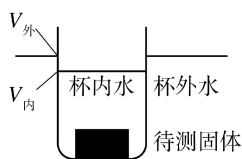


图 2

原因是此时“杯+杯内水”所受总重力(量杯所受重力为零)为 $G_{\text{杯}} + G_{\text{杯内水}} = 0 + \rho_{\text{水}} g V_0$, 而根据二力平衡条件, 杯外水对杯的浮力必然也等于 $\rho_{\text{水}} g V_0$ 。由阿基米德原理可知, 此时量杯排开液体体积也为 V_0 , 即杯外水所对刻度也为 V_0 , 杯内、外液面齐平。

在杯中放入待测(不溶于水的)固体, 使之浸没, 此时量杯会略有下降, 如图 2 所示, 分别读取此时内、外液面所示体积 $V_{\text{内}}$ 与 $V_{\text{外}}$ 。

此时“杯+杯内水+待测固体”所受总重力与杯外水对其浮力是一对平衡力, 浮力用阿基米德原理计算, 可有: $G_{\text{杯}} + G_{\text{杯内水}} + G_{\text{固}} = F_{\text{浮}}$, 即: $0 + \rho_{\text{水}} g V_0 + m_{\text{固}} g = \rho_{\text{水}} g V_{\text{外}}$, 可解得固体质量: $m_{\text{固}} = \rho_{\text{水}} (V_{\text{外}} - V_0)$ 。

由排水法可知, 杯内待测固体的体积为: $V_{\text{固}} = V_{\text{内}} - V_0$ 。

根据密度的定义式, 可知该固体的密度为:

$$\rho_{\text{固}} = \frac{m_{\text{固}}}{V_{\text{固}}} = \rho_{\text{水}} \frac{V_{\text{外}} - V_0}{V_{\text{内}} - V_0}。$$

可见只需读取 V_0 、 $V_{\text{内}}$ 和 $V_{\text{外}}$ 这 3 个数值, 结合已知的 $\rho_{\text{水}}$, 就可估测出待测固体的密度。

若在刻度杯上 V_0 处画线, 将固体放入后内、外液面与该线的差值记为 $\Delta V_{\text{内}}$ 和 $\Delta V_{\text{外}}$, 如图 3 所示, 即可简化为: $\rho_{\text{物}} = \rho_{\text{水}} \frac{\Delta V_{\text{外}}}{\Delta V_{\text{内}}}$ 。

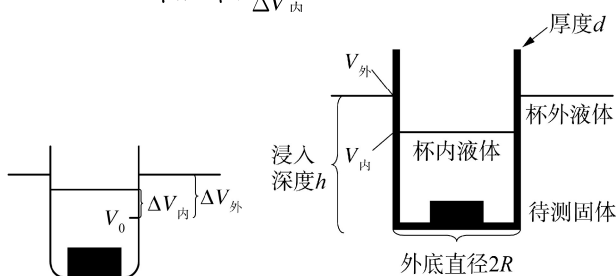


图 3

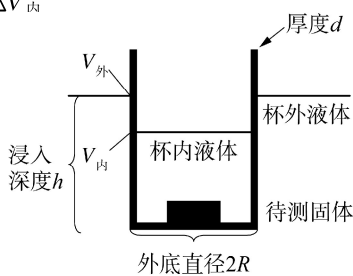


图 4

1.2.2 针对“真实量杯”的修正方案

真实的量杯有质量、有厚度, 考虑这两个影响因素时, 实验要稍复杂些。本实验面向初中生, 结合学生的数学水平, 将量杯形状简化为圆柱形, 杯底与杯壁间是直角而非圆角, 如图 4 所示。令杯底和杯壁厚度均为 d , 杯底外部半径为 R , 量杯漂浮时浸入水中的深度为 h , 则原理如下:

在量杯内放入体积为 V_0 的水, 再放入待测固体

并浸没, 此时量杯内液面所对刻度为 $V_{\text{内}}$ 。使量杯漂浮在水面, 杯外液面所对刻度为 $V_{\text{外}}$ 。

此时, 杯外液面所对刻度 $V_{\text{外}}$ 并非量杯排开水的体积, 而是 $V_{\text{外}} = \pi(R-d)^2(h-d)$ 。

可解得量杯浸在水中的深度为

$$h = \frac{V_{\text{外}}}{\pi(R-d)^2} + d$$

浸入深度为 h 时水的浮力

$$\begin{aligned} F_{\text{浮}} &= \rho_{\text{水}} g V_{\text{排}} = \rho_{\text{水}} g \pi R^2 h \\ &= \rho_{\text{水}} g \pi R^2 \left(\frac{V_{\text{外}}}{\pi(R-d)^2} + d \right) \end{aligned}$$

量杯、待测物体和杯内水所受总重力为

$$G_{\text{总}} = m_{\text{杯}} g + \rho_{\text{物}} g (V_{\text{内}} - V_0) + \rho_{\text{水}} g V_0$$

由 $F_{\text{浮}} = G_{\text{总}}$ 可得

$$\begin{aligned} \rho_{\text{水}} g \pi R^2 \left(\frac{V_{\text{外}}}{\pi(R-d)^2} + d \right) \\ = m_{\text{杯}} g + \rho_{\text{物}} g (V_{\text{内}} - V_0) + \rho_{\text{水}} g V_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{整理得 } V_{\text{外}} &= \frac{(R-d)^2 \rho_{\text{物}}}{R^2 \rho_{\text{水}}} V_{\text{内}} + \frac{(R-d)^2 m_{\text{杯}}}{R^2 \rho_{\text{水}}} + \\ &\quad \frac{(R-d)^2}{R^2} V_0 - \frac{\rho_{\text{物}} (R-d)^2}{\rho_{\text{水}} R^2} V_0 - \pi d (R-d)^2。 \end{aligned}$$

由此可知, 当所测物质($\rho_{\text{物}}$)不变、量杯($m_{\text{杯}}$ 、 d 、 R)不变时, 在平面直角坐标系内 $V_{\text{外}} - V_{\text{内}}$ 图象是一条直线, 斜率为 $k = \frac{(R-d)^2 \rho_{\text{物}}}{R^2 \rho_{\text{水}}}$ 。测出杯底半径 R 和杯壁厚度 d , 作图求出斜率 k , 即可获得待测物质密度为 $\rho_{\text{物}} = \frac{k R^2 \rho_{\text{水}}}{(R-d)^2}$ 。

2 本节课的设计理念

本节课有明、暗两条主线。明线是基于“理想量杯法”带领学生体验建模的过程。相比学生已学的其他实物模型, 理想化的“轻质薄壁量杯”与更贴近真实的“有质量有厚度量杯”都便于理解, 且从理想量杯到真实量杯, 所需的数学计算在学生能力范围内。学生可从头至尾, 亲身经历模型修正的完整过程。

相比从繁到简的建模路径, 本节课选择了从简到繁的“反向建模”方式, 大幅降低了对初中生数学能力的要求; 从简到繁中学生还能体验到用理想模型解决问题的真实过程。

“建模”的过程就是科学研究的过程。本节课的暗线是带领学生经历一次对真实问题的研究。《义务教育物理课程标准(2022 年版)》要求学生能分析失败的原因, 勇于修正不正确的观点^[2]。“理想量杯法”的

理论推导很美好,但实际操作时,学生就会发现困难重重。生成方案,实践受挫;改进方案,发现还有疏漏;最后终于推导出冗长的式子眼见就成功了,却还是差了一点——这个最终也没有完成的任务,势必给学生一些关于模型与现实、关于理论与实际的小小震撼——而人类对自然的研究,就是起起伏伏、永在路上。

3 基于本实验的教学设计

3.1 创设“新”情境,激发思维热情

情境引入:2023 年 6 月 22 日端午节,本校惊鸿龙舟队在第 10 届上海市学生龙舟全能赛龙舟组获得金牌。在划船回校的途中,队员小东兴奋地想测量“金牌”密度,从而判断其材质。小东没有随身携带天平的习惯,但勤奋训练、饮食自律的他随身带了一个透明轻质薄壁(质量不计、厚度不计)量杯来喝水。深思熟虑后,他想到一个方法……

令人振奋的新闻与奇怪的后续展开,令在座的准龙舟队员们兴奋不已,思维活跃。

3.2 推演“新”方法,串起新旧知识

在本环节,学生将自行挖掘出量杯的用法,推导出前文的“曹冲称象法”和“理想量杯法”两个方案。此时学生信心满满,沉浸在对知识运用的喜悦中。

3.3 动手亲尝试,想得美做很难

学生依次使用两种方法测量了常见物体的密度。

实验器材:一次性量杯(止咳糖浆赠送)、水槽、水、胶头滴管、待测物体。

实验中,学生深切体会到理想与现实的差距。在理论推导中,学生欣喜于实验方案的巧妙,沉浸于思维逻辑的美好;但信心满满动手实验时,却遭遇大量的现实问题,比如:

- (1) 量杯难以在水面保持平衡,放入物体后总会歪斜,难以读取液面刻度;
- (2) 量杯中初始水量选取困难,水少难以浸没待测物体,水多则整体下沉没入水中;
- (3) 只能称量轻小物体;
- (4) 液面刻度难以读取。

实验中的困难与改进方案见图 5。

两种测量方法遇到的操作困难相似,但“曹冲称象法”无需在放入待测物体前先倒入体积为 V_0 的水,从而避免了 V_0 难以预估(太小难以浸没物体,太大又导致整体下沉)的问题;且在使用同一量杯时,其能称量的物体质量范围更大。

理论推导完美却实践困难,原理更精妙的那个更难操作,实验的改进措施还与测量原理的前提相

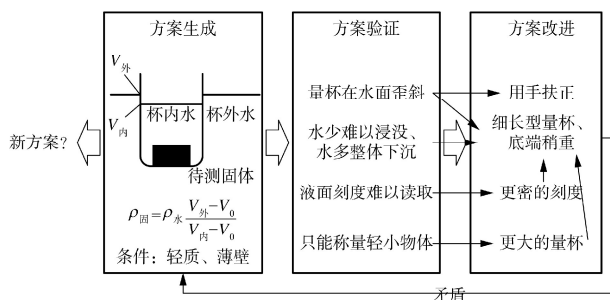


图 5

悖(杯底配重,使之竖直)。在这一刻,学生的欣喜降低,但解决问题的愿望更盛。

3.4 重启“真”思考,理想模型现实化

教师提问:(1) 使用“曹冲称象法”时,需不需要量杯是轻质、薄壁的?

生 1:量杯不需要轻质,但需要薄壁。量杯内只放水,漂浮在水面,通过内、外刻度差就可以算出量杯的质量。

生 2:但量杯质量不能太大,量杯太重会直接下沉。容积一样的情况下,量杯质量越大越易下沉,能够测量的物体的最大质量越小。

(2) 刚才用“理想量杯法”做实验时,量杯并不是真正轻质、薄壁的理想容器。量杯的质量与厚度是否会影响实验结果? 分别会使测量结果偏小还是偏大?

(3) 真实量杯有质量有厚度,这种情况下,还能否使用“理想量杯法”测物质密度?

第二问可通过对测量原理的分析得出答案,量杯的厚度会导致测量值偏小,量杯的质量会导致测量值偏大。面对第三问,学生踊跃提出自己的猜想,在发现其缺乏实证后,纷纷将目光重新投放到实验方案的理论分析过程上。最终,他们对有厚度的量杯建立起模型,得出了表达式(推导过程见 1.2.2):

$$V_{\text{外}} = \frac{(R-d)^2 \rho_{\text{物}} V_{\text{内}}}{R^2 \rho_{\text{水}}} + \frac{(R-d)^2 m_{\text{杯}}}{R^2 \rho_{\text{水}}} + \frac{(R-d)^2 V_0}{R^2} - \frac{\rho_{\text{物}} (R-d)^2 V_0}{\rho_{\text{水}} R^2} - \pi d (R-d)^2$$

在这个环节,教师需引导学生将量杯建模,引导学生注意到 $V_{\text{外}} - V_{\text{内}}$ 图象是直线,帮助学生根据图线生成实验过程。

生:在量杯中逐步加入同种物质(如依次增加 1 枚硬币),记录好对应的 $V_{\text{外}}$ 、 $V_{\text{内}}$ 读数,获得多组数据后绘制 $V_{\text{外}} - V_{\text{内}}$ 图象,算出图象斜率 k 。最后,通过 $\rho_{\text{物}} = \frac{k R^2 \rho_{\text{水}}}{(R-d)^2}$ 获得待测物体的密度。

将轻质薄壁量杯转变为有质量有厚度的量杯,

仅仅两个如此小的现实因素,作用在这样一个简单的实验上,就产生了如此巨大的计算量。学生对“物理模型”有了更切身的认识。

在本环节的公式推导中,学生对数学和物理的紧密联系也深有体会:构建量杯的数学模型,计算柱体的体积,得到 $V_{\text{外}} - V_{\text{内}}$ 表达式后在直角坐标系内绘制图线,通过直线斜率求得所需物理量。

3.5 回到真情境,现实还要更复杂

师:我们刚才的推导都在水中进行,但小东周围是河水。河水不是纯水,其密度未知。这种情况怎么办?好在,船上另一位同学给了小东一瓶纯净水,小东靠这瓶水解决了问题。

有了前 2 轮的理论推导,学生很快做出反应:

在量杯中倒入体积为 $V_{\text{内}}$ 的纯净水,此时量杯连同杯内纯净水所受总重力 $m_{\text{杯}}g + \rho_{\text{水}}gV_{\text{内}}$ 。

将量杯(连同纯净水)放入待测液体(河水)中,若杯外液面所对刻度为 $V_{\text{外}}$,可得量杯所受浮力大小为 $\rho_{\text{液}}g\pi R^2\left(\frac{V_{\text{外}}}{\pi(R-d)^2} + d\right)$ 。

$$\text{由 } m_{\text{杯}}g + \rho_{\text{水}}gV_{\text{内}} = \rho_{\text{液}}g\pi R^2\left(\frac{V_{\text{外}}}{\pi(R-d)^2} + d\right) \text{ 得}$$

$$V_{\text{外}} = \frac{(R-d)^2\rho_{\text{水}}}{R^2\rho_{\text{液}}}V_{\text{内}} + \frac{(R-d)^2m_{\text{杯}}}{R^2\rho_{\text{液}}} - \pi d(R-d)^2。$$

以 $V_{\text{外}}$ 为纵坐标、 $V_{\text{内}}$ 为横坐标,可画出一函数图线,斜率 $k' = \frac{(R-d)^2\rho_{\text{水}}}{R^2\rho_{\text{液}}}$ 。

可见,只需在量杯内逐次加入纯净水,并读取 $V_{\text{外}}$ 、 $V_{\text{内}}$ 数值,画出 $V_{\text{外}} - V_{\text{内}}$ 图线,求出斜率 k' ,即可求得河水密度为 $\rho_{\text{液}} = \frac{(R-d)^2\rho_{\text{水}}}{k'R^2}$ 。

师:至此,我们终于解决了小东的测金牌密度难题,哪位同学从头到尾来讲讲测量步骤?

生 1:第 1 步,测河水密度。方法是在量杯内逐次加入纯净水,读取并画出 $V_{\text{外}} - V_{\text{内}}$ 图线,求出斜率 k' ,算出河水密度 $\rho_{\text{液}} = \frac{(R-d)^2\rho_{\text{水}}}{k'R^2}$ 。第 2 步,测金牌密度。将金牌……金牌只有一块,无法描点画 $V_{\text{外}} - V_{\text{内}}$ 图线。

生 2:把金牌切成很多小份。

生 3:再拿几块金牌。

生 4:只能假设量杯是轻质、薄壁的,然后进行估算了。

分析的结局,因只有 1 块金牌,无法绘出 $V_{\text{外}} - V_{\text{内}}$ 图线,还是不能用“真实量杯”达成金牌的测量。但经历了之前的挫折,学生坦然接受了这个结果,并提出了“再拿几块金牌,就可以描点作图”的改进方案。在这

最终的挫折里,学生对“现实问题”有了更深的认识。

最后,教师布置课后选做任务:(1)课上所用的(止咳糖浆附赠)量杯轮廓并不是圆柱形,而有一定倾斜,这倾斜是否会影响我们的测量方案?试作理论推导。(2)是否还存在其他我们忽视的影响因素,如何建模验证这影响因素对测量的影响?(3)根据课上总结的改进方案和自己的思考,制作一个能更好测量物体密度的量杯,并附上使用说明。三个选做题中两个偏向于逻辑推理,锻炼学生的科学思维,一个偏重于动手实践,锻炼科学探究。有钻研意愿的学生均能有的放矢,各展其能。

4 结 语

学生经历了三次较高难度的逻辑推导(理想量杯法、使用有质量有厚度量杯时的改进方案、测河水密度),体验了数学与物理的紧密关联(对量筒建模、公式计算各物理量、从复杂公式中看出需画 $V_{\text{外}} - V_{\text{内}}$ 图线计算斜率从而明确实验过程),在思考的全程中运用了建模、类比、等效替代等多种科学方法。这些纠缠在一起,学生的思维经历了长足锻炼。

学生不断根据新发掘的情境条件生成实验方案、交流测量方法、对“曹冲称象法”与“理想量杯法”进行对比、合作实验、发现实验中的问题、思考改进措施并重新设计方案。在课后的选做任务中,这种科学探究将继续进行。

学生对“创新”会有新的体会:一个量杯就能完成对密度的测量,那么身边的其他常见物品,是否也能发掘出意外的功能?创新就在我们身边。但同时,想法精美的“理想量杯法”,在实践时却困难重重。创新并不容易,必须落地到现实。

本节课学生情绪会经历几次起伏:看到引入情境时的欢快、推导出有趣新方案时的高昂、动手实验却被各种现实因素频频干扰时的受挫、改进方案成功将阻碍一一克服后的振奋和最终仍因“金牌太少”无法测量的坦然。这些情绪的起伏,就是人类认识自然这一路行来的写照——发现问题、提出猜想、设计方案、动手实践、验证反思、改进再来。

后记:校龙舟队于 2025 年 5 月 31 日的第十二届比赛中再获金牌,学生们的“ $V_{\text{内}} - V_{\text{外}}$ ”线迎来了第二个点。“真实量杯法”乍见曙光。

参考文献

- [1] 陈显灶,周玲.基于项目驱动的思维可视化教学实践——以“特殊方法测密度”教学设计为例[J].物理教学,2023(8):24—27.
- [2] 中华人民共和国教育部.义务教育物理课程标准(2022 年版)[S].北京:北京师范大学出版社,2022.