

跨越微观与宏观的数学桥梁

——菲尔兹奖得主邓煜的理论工作及其物理渊源

管曙光 (华东师范大学物理学院 上海 200241)

摘 要 2026 年 7 月国际数学家大会上,中国数学家邓煜凭借在数学物理、非线性偏微分方程领域的奠基性突破荣获菲尔兹奖。邓煜最重要的学术贡献是完整攻克狭义希尔伯特第六问题,从而以严格的数学证明搭建起“牛顿微观粒子动力学—玻尔兹曼方程—宏观流体方程”的完整逻辑链条。文章系统梳理邓煜的核心研究成果,阐释其理论与经典统计物理的深层关联,剖析该理论对玻尔兹曼分子混沌假设的数学验证,厘清微观可逆动力学与宏观不可逆热力学的逻辑矛盾,最后论述这套跨尺度理论框架对基础物理统一化进程的深远意义。

关键词 希尔伯特第六问题 玻尔兹曼方程 分子混沌假设 微观可逆性 统计物理

文章编号 1002-0748(2026)10-0002

中图分类号 G633·7

文献标识码 A

1 引言:希尔伯特第六问题与物理 底层的跨尺度裂隙

1900 年,数学家希尔伯特在巴黎国际数学家大会上提出了 23 个引领 20 世纪数学发展的核心难题,其中第六问题直指物理学公理化的终极目标:以严格数学公理体系为根基,从微观基本运动定律完整推导出所有宏观物理方程,消除微观牛顿力学与宏观热力学之间的逻辑割裂。这一问题被拆解为两大核心分支:广义分支旨在统一量子力学、相对论全部物理框架,至今未取得全局性突破;狭义分支聚焦经典稀薄气体系统,要求从描述单个粒子运动的牛顿力学出发,严格推导出刻画气体集体行为的玻尔兹曼方程,并进一步导出欧拉方程和纳维-斯托克斯方程等宏观流体力学方程。

从物理世界来看,自然界天然存在三层尺度描述体系:

(1) 微观尺度:数量量级为阿伏加德罗常数的气体分子可视为刚性硬球,遵循牛顿弹性碰撞定律,运动方程具备完美时间可逆性,即微观可逆性;

(2) 介观尺度:玻尔兹曼方程以单粒子相空间分布函数为核心变量,刻画粒子数密度、速度、能量的统计演化,天然包含熵增与时间不可逆的“时间之箭”;

(3) 宏观尺度:流体力学方程将气体抽象为连续介质,仅用密度、压强、温度、流速少数宏观物理量

描述整体流动,扩散、热传导等宏观过程,具有不可逆性,即宏观不可逆性。

随后百余年来,物理学家早已在工程、热力学、航空和航天等领域广泛使用玻尔兹曼方程与流体力学方程并取得重大的成就,但二者与底层牛顿力学之间始终缺失严格的数学证明链条。究其原因,这是因为有两道根本性的障碍长期无法逾越:其一,玻尔兹曼为推导方程引入的分子混沌假设仅为物理直观猜想,缺乏严格证明,成为整个动理学理论的逻辑短板;其二,洛施密特悖论带来的核心矛盾:微观粒子运动完全时间可逆,为何宏观系统中大量粒子集体演化必然呈现不可逆的熵增趋势?微观可逆与宏观不可逆的冲突,被视作经典统计物理最深刻的底层危机。

1975 年,数学家 Oscar Lanford 取得里程碑式阶段性成果:在玻尔兹曼-格拉德稀薄气体极限下,他证明了短时间内牛顿硬球系统可以收敛至玻尔兹曼方程。但该定理存在致命局限:证明有效的时间窗口极短,仅略长于粒子单次平均碰撞间隔。一旦演化至长时间尺度,粒子重复碰撞产生的高阶关联会无限增殖,分子混沌假设自动失效,整套推导逻辑崩塌。此后近 50 年,全球数学物理领域无数研究者试图突破“短时壁垒”,均未能实现长时间尺度下的严格收敛证明,希尔伯特第六问题的狭义分支再次陷入长期停滞。

邓煜与合作者 Zaher Hani、马骁在 2024—2025

年连续发表两篇总计超 300 页的长篇奠基论文,创造性搭建分层组合切割算法和高阶累积量控制框架,彻底突破短时限,首次在任意长时间区间内完成从微观硬球动力学到玻尔兹曼方程的严格推导,再衔接 Chapman-Enskog 展开理论完整导出宏观流体方程,从而闭环解决了狭义希尔伯特第六问题,这一工作也成为他获颁菲尔兹奖的核心依据。除气体动力学外,邓煜同期发展的随机偏微分方程、非线性薛定谔波动动力学理论,进一步打通经典波动、量子多体与统计力学的交叉通道,构建起统一跨尺度数学物理的范式。

2 邓煜的核心贡献:三层跨尺度推导 框架与数学工具创新

国际数学联盟菲尔兹奖官方颁奖词将邓煜的成果划分为三大核心板块:稀薄硬球系统长时间收敛至玻尔兹曼方程、非线性色散系统波动动力学极限推导、随机初值下非线性薛定谔方程与吉布斯测度理论(For his work in partial differential equations, including the rigorous derivation of the Boltzmann equation from hard-sphere dynamics for rarefied gases, the derivation of wave kinetic equations from nonlinear dispersive systems, and probabilistic approaches to nonlinear Schrodinger dynamics.)^[1]。其中第一部分是衔接经典统计物理、回应玻尔兹曼理论基础悖论的核心,也是获奖的最重要成果,后两项则拓展了该跨尺度思想在波动、量子多体体系的普适性。

2.1 微观到介观:长时间玻尔兹曼收敛定理

研究模型选取经典稀薄硬球气体,满足玻尔兹曼-格拉德极限条件:粒子总数 $N \rightarrow \infty$, 粒子直径 $\sigma \rightarrow 0$, 同时维持 $N\sigma^2$ 为固定常数,保证二元碰撞主导、三体及多体碰撞概率趋于零,贴合真实稀薄气体物理场景。

2.1.1 传统 Lanford 短时理论的固有缺陷

Lanford 的证明依赖碰撞历史级数展开,将所有粒子碰撞路径编码为费曼式碰撞图,逐项估计高阶关联项的积分贡献。但该方法仅能控制极短时间演化。随着演化时间的延长,粒子发生二次、三次重复碰撞,粒子间会产生长程速度关联,这种“记忆效应”会破坏分子混沌假设的独立粒子近似,从而导致级数展开发散,无法继续维持收敛性。简单而言,粒子碰撞留下的相互关联会随时间累积,使得“两个碰撞前粒子速度相互独立”的混沌假设不再成立,玻尔

兹曼方程失去推导根基。

2.1.2 邓煜团队原创数学工具:分层时间切割与组合图分解算法

为解决长时间关联导致的发散难题,邓煜团队提出了两套原创的分析框架:

第一,分层时间切片控制法。将任意长演化总时间切割为无数段可独立控制的短时区间,在每一区间内调用 Lanford 短时收敛估计,同时建立统一的关联衰减传递估计,逐层刻画、约束跨区间累积的粒子速度关联。每一层演化结束后,稀薄气体极限自带的概率衰减效应会大幅冲刷粒子间留存的历史关联,由此严格证明:在下一层演化区间中,分子混沌近似依旧渐近成立。

第二,碰撞历史图切割分解技术。所有粒子碰撞路径构成的高阶组合图存在天然可分割节点,通过算法识别并切断代表重复碰撞、强关联的子图结构,将天文量级的复杂高维积分拆解为有限基础算子的复合。同时引入高阶累积量序列,定量刻画粒子关联强度,严格证明:在玻尔兹曼-格拉德极限下,所有破坏分子混沌假设的强关联构型,对应的测度随粒子数趋于无穷而指数衰减至零,从数学上量化验证了分子混沌假设的长期有效性。

基于上述工具,邓煜严格证明核心定理:只要玻尔兹曼方程在对应时间区间内存在光滑正则解,微观硬球粒子系统的单粒子统计分布,将在全部演化时长内一致收敛至玻尔兹曼方程的解。该结论适用于二维、三维无界欧氏空间,同时拓展至周期边界容器(真实密闭气体场景),彻底消除了此前近半个世纪的短时限。

2.2 介观到宏观:玻尔兹曼方程通向流体力学的闭环推导

在完成微观—介观通道证明后,邓煜将整套极限理论与经典 Chapman-Enskog 多尺度展开理论结合,搭建完整第二层推导链条:以玻尔兹曼分布函数为中间媒介,取流体极限(碰撞频率趋于无穷),严格推导出可压缩欧拉方程以及不可压缩纳维-斯托克斯-傅里叶方程。

该证明补齐了希尔伯特第六问题的全部要求,建立了无断点的逻辑链条:牛顿 N 粒子硬球动力学 $\xrightarrow{\text{玻尔兹曼-格拉德极限}}$ 玻尔兹曼动力学方程 $\xrightarrow{\text{流体碰撞极限}}$ 宏观流体方程这套链条统一了微观力学、统计动力学、连续介质流体力学三大经典物理分支,从数学层面证明不同尺度物理规律不存在内在逻辑冲突,为物理理论统一提供了首个完整经典范例。值得指出

的是,邓煜发展的跨尺度收敛理论并非仅适用于经典气体,而是具备普适性的统一数学范式,可同时描述经典粒子、经典波动、量子多体三类物理体系,因此这一理论框架对基础物理统一化具有重要的价值。

3 邓煜理论与玻尔兹曼分子混沌假设的深层关联:百年猜想的严格数学证明

3.1 分子混沌假设的物理内涵与历史争议

1872 年玻尔兹曼推导动力学方程时,为简化二元碰撞积分引入核心前提——分子混沌假设:碰撞发生前,两个即将相撞的粒子速度统计独立,不存在速度关联;碰撞完成后二者产生关联,但新进入碰撞的粒子始终保持独立。该假设直接消去高维粒子关联积分,将 N 粒子系统简化为单粒子分布函数演化,是玻尔兹曼方程成立的唯一必要前提。

但该假设自诞生起持续饱受学界质疑:微观牛顿运动是完全确定性的,粒子过往碰撞必然留下速度关联,理论上不存在绝对独立的粒子对。洛施密特、策梅洛先后提出悖论,指出混沌假设人为引入时间不对称性,破坏了微观动力学的时间可逆性,似乎整套统计力学的逻辑根基摇摇欲坠。百余年中,分子混沌仅为物理层面的合理猜想或假设,始终缺少严格的数学证明,成为统计物理最大的逻辑短板。

3.2 邓煜工作对分子混沌假设的分层验证

邓煜团队的长时间收敛定理,从极限、时间演化、概率测度三个维度完整证明分子混沌假设的合理性,严格厘清了其适用边界:

(1) 极限层面的渐近混沌

在玻尔兹曼-格拉德稀薄气体极限($N \rightarrow \infty, \sigma \rightarrow 0$)下,任意有限时间、任意粒子对之间的碰撞前速度关联,对应的相空间测度指数衰减至零。简单来说:当气体足够稀薄、粒子数量足够庞大时,几乎所有即将碰撞的粒子对都满足速度独立,分子混沌近似渐近成立。少数存在强关联的粒子重复碰撞构型,在宏观统计中概率趋近于零,不会改变整体分布演化趋势。

(2) 长时间演化下混沌的持续传播

Lanford 仅证明短时间内混沌假设可维持,邓煜的分层时间切片算法证明:每经过一层时间演化,稀薄极限的衰减效应会冲刷、削弱粒子累积的关联,每一段新演化区间内,碰撞前粒子重新恢复近似独立状态,分子混沌可以在任意长时间内持续保持,彻底解决“长期碰撞破坏分子混沌”的历史难题。

(3) 区分碰撞前后关联的不对称性

邓煜严格区分“碰撞前独立、碰撞后关联”的单向不对称结构,数学上证明:混沌假设仅约束碰撞前粒子状态,但碰撞后产生的关联并不会影响后续碰撞过程。打个比方来说,将粒子碰撞想象成一群人在广场上的随机行走。擦肩而过之前,两个路人的行走方向互不影响(撞前独立);擦肩而过之后,两个人短暂记住对方的行走路线(产生关联);但这段短暂记忆(关联),并不会影响他们之后和其他陌生人擦肩而过的状态,下一次偶遇新路人时,二者方向依旧互不相关。当气体满足稀薄极限下(粒子极多、粒子很小、碰撞大多是两两单次碰撞),即便某次碰撞给两个粒子留下速度关联,等到这两个粒子下一次再遇到别的粒子、准备新碰撞时,中间漫长的随机运动、无数次和其他粒子的碰撞,会彻底冲淡——实际上是抹掉了旧的关联。这里的关键是旧关联的影响力会呈指数级衰减,几乎不可能带到下一次碰撞里,也就破坏不了“撞前独立”的规则。邓煜的数学证明表明,这种天然单向不对称,正是玻尔兹曼方程不可逆性的来源,直接回应洛施密特对混沌假设“人为引入时间箭头”的批判——不可逆性并非假设强行附加,而是海量粒子在稀薄极限下关联演化的自然渐近结果。从物理上看,宏观不可逆性的根源就是宏观系统除了满足微观牛顿力学外,还必须服从统计规律的结果。

简言之,邓煜的成果不再将分子混沌视作玻尔兹曼的人为猜想,而是牛顿微观动力学在稀薄粒子极限下严格导出的渐近统计性质,补齐了统计力学百年缺失的逻辑根基。

4 从微观可逆到宏观不可逆:邓煜理论对洛施密特悖论的完整解释

微观牛顿力学时间可逆、宏观热力学时间不可逆,是经典物理最核心的基础性矛盾。这一矛盾集中体现在洛施密特悖论之中:若所有粒子速度瞬间反转,微观轨迹将原路回溯,气体扩散、热量传递过程完全逆向,与宏观熵增的单向时间之箭直接冲突。过去物理学界仅能从概率、粗粒化角度给出定性物理解释,缺乏完整数学证明支撑,而邓煜的跨尺度收敛框架从动力学、概率、极限三重维度给出了定量、严谨的统一解释。

4.1 两层尺度的时间对称性差异根源

(1) 微观尺度:确定可逆的单粒子动力学

孤立硬球粒子系统的哈密顿运动方程满足时间

反演不变性 $t \rightarrow -t$, $v \rightarrow -v$, 任意粒子轨迹都存在反向镜像解, 系统本身不存在任何时间方向偏好。但微观描述的核心缺陷是: 需要追踪 $6N$ (N 为阿伏加德罗常数量级) 维相空间全部自由度, 无法直接提取温度、压强等宏观可观测量, 可逆性仅存在于完整微观轨迹层面。

(2) 介观/宏观尺度: 粗粒化统计带来不可逆涌现

玻尔兹曼方程和流体方程仅保留单粒子 6 维相空间分布, 丢弃了 N 粒子系统全部高阶速度关联信息, 这一粗粒化操作是不可逆性涌现的核心。邓煜通过累积量定量证明: 高阶关联代表微观层面可反向回溯的“记忆信息”, 在稀薄极限下, 这类信息对应的测度持续衰减, 无法在宏观统计分布中体现; 宏观可观测量仅由无关联的单粒子分布主导, 天然呈现单向熵增演化。

4.2 邓煜理论对悖论的定量化解释

(1) 可逆微观轨迹是零测度稀有事件

虽然微观动力学存在反向演化的数学解, 但在全部可能的初始相空间构型中, 能自发出现“气体反向收缩(自由扩散的逆过程)、热量自发从低温物体流向高温物体(热传导的逆过程)”的初始状态集合, 测度趋近于零。邓煜严格计算关联衰减速率, 证明: 只要系统满足稀薄气体极限, 绝大多数初始构型都会向熵增方向演化; 可逆回溯的轨迹只是相空间中可忽略的特例, 无法观测到宏观的逆向过程。

(2) 长时间演化中关联不可逆衰减主导动力学趋势

粒子持续二元碰撞不断产生高阶关联, 而稀薄极限的概率冲刷效应持续抑制关联累积, 二者形成竞争。邓煜的组合图估计证明: 关联衰减的力量永远强于碰撞带来的关联增长, 随时间推移, 微观可逆记忆信息持续丢失, 宏观分布的时间不可逆性不断强化。

(3) 区分动力学可逆性与统计演化不可逆性

邓煜清晰界定两个概念的边界: 哈密顿微扰动力学本身具备完美时间反演对称性, 不存在内在时间箭头; 但当我们选取宏观统计可观测、对高维微观系统做粗粒化极限约化后, 不可逆性作为集体涌现行为自然产生, 二者不存在逻辑矛盾。洛施密特悖论的产生, 本质是混淆了完整微观自由度与粗粒化宏观统计描述, 而邓煜的跨尺度推导从数学上严格分隔两层描述的适用范围, 彻底消解了悖论的逻辑冲突。

这套解释超越了以往物理学家仅靠概率、熵增的定性论述, 以严格积分估计、测度衰减证明为支

撑, 为解释统计力学宏观时间不对称性的起源提供了坚实的数学基础。

5 总结与展望

邓煜以原创组合分析、分层极限控制工具, 攻克百年悬而未决的狭义希尔伯特第六问题, 搭建起从微观牛顿粒子到宏观流体方程的完整严格推导链条。其理论的核心物理价值体现在三重维度: 其一, 从数学上证明玻尔兹曼分子混沌假设是稀薄多体系统的渐近统计性质, 终结百余年猜想争议, 稳固统计力学根基; 其二, 定量消解微观可逆动力学与宏观不可逆热力学的洛施密特悖论, 厘清时间之箭的统计涌现本质; 其三, 建立普适跨尺度收敛范式, 首次实现经典物理微观、介观、宏观三层理论的逻辑统一, 同时为量子、相对论多体物理的统一化研究提供全新路径。

物理学科数百年来的核心追求, 是建立统一、自洽、跨尺度的基础理论框架, 消除经典力学、统计物理、流体力学、波动理论之间的割裂。在邓煜之前, 微观力学、统计动力学、流体力学是三套相互独立、缺乏逻辑关联的理论体系, 物理学家只能依靠经验、直观在不同尺度间切换模型, 理论体系存在天然裂痕。邓煜的极限收敛定理证明: 三大尺度物理规律并非彼此独立, 而是同一套牛顿微观动力学在不同粗粒化极限下的等价有效描述。

这一结论重塑了经典物理的基础图景: 整个经典宏观世界的所有流体、热学、扩散现象, 都可以从单个粒子的弹性碰撞公理严格推导, 玻尔兹曼熵增原理、流体守恒定律不再是独立经验假设, 而是微观多体系统的统计涌现结果。长久以来统计物理的两大基础危机——分子混沌假设的合理性、微观可逆与宏观不可逆的矛盾, 全部得到数学层面的完整解答, 经典统计力学的公理体系自此完全自洽。

从数学物理学科发展来看, 邓煜的工作打通了纯偏微分方程与基础理论物理的壁垒, 证明复杂物理悖论可以依靠原创分析、组合数学工具获得严谨解答。面向未来, 学界将基于其框架进一步拓展至强耦合稠密气体、相对论粒子、量子纠缠多体系统, 逐步推进希尔伯特第六广义问题的研究, 向着全域统一物理公理体系的终极目标持续迈进。

参考文献

- [1] https://www.cms.org.cn/Home/news/news_details/id/1453.html.